**

BACHILLERATO  
TRABAJOS



|  |  |
| --- | --- |
| **MATERIA: MATEMÁTICAS V**  **GRUPOS: 53 – B / 83 – A**  **PERIODO: 15 – 17 NOV** | **FECHA: NOVIEMBRE / 2017**  **PROFESOR: ENRIQUE LÓPEZ** |

**INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD**

**Campana de Gauss:**

**Esta función de densidad de probabilidad tiene una expresión parecida a:**



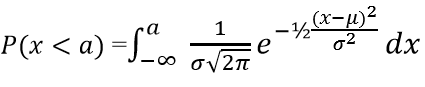
**La distribución Normal o curva Normal de Gauss es:**



**El valor de C es:**



**Entonces, para calcular la probabilidad de que ocurra un suceso, entre -∞ y a, sólo hay   
que calcular:**



**Pero para cada valor de la media µ y para cada valor de la desviación estándar σ se   
necesitarían tablas diferentes. Son demasiadas.**

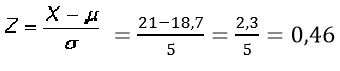
**Para evitar esto, se hace una sustitución o cambio de variable.**

**Eso lo veremos ahora**

**A continuación se muestra un ejercicio:**

**La temperatura durante setiembre está distribuida normalmente con media 18,7ºC y   
desviación standard 5ºC. Calcule la probabilidad de que la temperatura durante setiembre   
esté por debajo de 21ºC.**





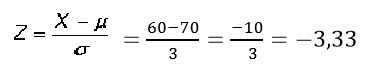
**Ahora vamos a la tabla y para el valor de Z = 0,46 tenemos que la probabilidad es de 0,6772**

**Para calcular la probabilidad es necesario consultar la tabla de distribución normal misma  
subida a la plataforma Google Classroom.**

**Ejemplo 2**

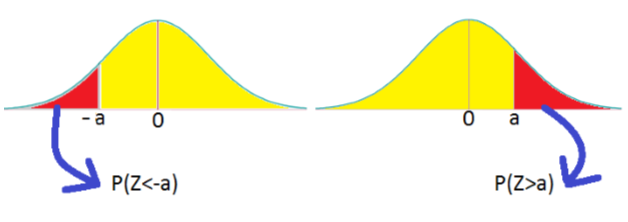
**La media de los pesos de 5000 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg.   
Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, “hallar cuántos estudiantes” pesan   
menos de 60 kg.**





**¿Y cómo buscamos en la tabla un número negativo?**

**El valor negativo sólo nos está diciendo que estamos por debajo de la media. Pero en la tabla   
todos los valores de Z son positivos. ¿Entonces?**



**Mirando la tabla para Z = 3.33, queda que la probabilidad es de 0,9996.**

**Entonces, P (Z>3,33) = 1 - 0,9996 = 0,0004. = P (Z < - 3,33)**

**Esto es, el 0,04 % de los 5000 estudiantes pesan menos de 60 Kg. Son 2 estudiantes.**

**INTRODUCCIÓN A COMBINACIONES Y PERMUTACIONES**

**Normalmente usamos la palabra "combinación" descuidadamente, sin pensar en si el orden   
de las cosas es importante. En otras palabras:**

**Ejemplo 1:**

**"Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas": no importa en   
qué orden pusimos las frutas, podría ser "bananas, uvas y manzanas" o "uvas, manzanas   
y bananas", es la misma ensalada.**

**Ejemplo 2:**

**"La combinación de la cerradura es 472": ahora sí importa el orden. "724" no funcionaría,   
ni "247". Tiene que ser exactamente 4-7-2.**

**Así que en matemáticas usamos un lenguaje más preciso:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | * **Si el orden no importa, es una combinación.** |
|  | * **Si el orden sí importa es una permutación.** |

**Permutaciones:**

**Hay dos tipos de permutaciones**

1. **Se permite repetir: como la cerradura de arriba, podría ser "333".**
2. **Sin repetición: por ejemplo los tres primeros en una carrera. No puedes quedar primero y segundo a la vez.**

**Permutaciones con repetición:**

**Son las más fáciles de calcular. Si tienes n cosas para elegir y eliges r de ellas, las permutaciones posibles son:**

**n × n × ... (r veces) = nr**

**Por ejemplo en la cerradura de arriba, hay 10 números para elegir (0,1,...,9) y eliges 3 de ellos:**

**10 × 10 × ... (3 veces) = 10 al cubo = 1000 permutaciones**

**Así que la fórmula es simplemente:**



**Permutaciones sin repetición:**

**Por ejemplo, ¿cómo podrías ordenar 16 bolas de billar?**

**Después de elegir por ejemplo la "14" no puedes elegirla otra vez.**

**Así que tu primera elección tiene 16 posibilidades, y tu siguiente elección tiene 15 posibilidades,   
después 14, 13, etc. Y el total de permutaciones sería:**

**16 × 15 × 14 × 13 ... = 20,922,789,888,000**

**Pero a lo mejor no quieres elegirlas todas, sólo 3 de ellas, así que sería solamente:**

**16 × 15 × 14 = 3360**

**Es decir, hay 3,360 maneras diferentes de elegir 3 bolas de billar de entre 16.**

**La función factorial (símbolo: !) significa que se multiplican números descendentes. Ejemplos:**

* **4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24**
* **7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 5040**
* **1! = 1**

**Así que si quieres elegir todas las bolas de billar las permutaciones serían:**

* **16! = 20,922,789,888,000**

**Pero si sólo quieres elegir 3, tienes que dejar de multiplicar después de 14. ¿Cómo lo escribimos? Hay un buen truco... dividimos entre 13!...**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **16 × 15 × 14 × 13 × 12 ...** |  | **= 16 × 15 × 14 = 3360** |
|  |
| **13 × 12 ...** |

**¿Lo ves? 16! / 13! = 16 × 15 × 14**

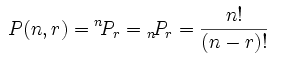
**Nuestro "ejemplo de elegir en orden 3 bolas de 16" sería:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **16!** | **=** | **16!** | **=** | **20,922,789,888,000** | **= 3360** |
|  |  |  |
| **(16-3)!** | **13!** | **6,227,020,800** |

**¿De cuántas maneras se pueden dar primer y segundo premio entre 10 personas?**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **10!** | **=** | **10!** | **=** | **3,628,800** | **= 90** |
|  |  |  |
| **(10-2)!** | **8!** | **40,320** |

**La fórmula se escribe:**



**Combinaciones:**

**También hay dos tipos de combinaciones (recuerda que ahora el orden no importa):**

1. **Se puede repetir: como monedas en tu bolsillo (5,5,5,10,10)**
2. **Sin repetición: como números de lotería (2,14,15,27,30,33)**

**Combinaciones sin repetición:**

**Así funciona la lotería. Los números se eligen de uno en uno, y si tienes los números de la   
suerte (da igual el orden) ¡entonces has ganado!**

**Volviendo a las bolas de billar, digamos que queremos saber qué 3 bolas se eligieron, no el orden.**

**Ya sabemos que 3 de 16 dan 3360 permutaciones.**

**Pero muchas de ellas son iguales para nosotros, porque no nos importa el orden.**

**Por ejemplo, digamos que se tomaron las bolas 1, 2 y 3. Las posibilidades son:**

|  |  |
| --- | --- |
| **El orden importa** | **El orden no importa** |
| **1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1** | **1 2 3** |

**Así que las permutaciones son 6 veces más posibilidades.**

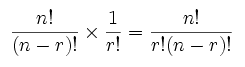
**De hecho hay una manera fácil de saber de cuántas maneras "1 2 3" se pueden ordenar, y ya la sabemos. La respuesta es:**

**3! = 3 × 2 × 1 = 6**

**(Otro ejemplo: 4 cosas se pueden ordenar de 4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24 maneras distintas, ¡prueba tú mismo!)**

**Así que sólo tenemos que ajustar nuestra fórmula de permutaciones para reducir por las maneras de ordenar los objetos elegidos (porque no nos interesa ordenarlos):**

**La fórmula es:**



**Entonces, nuestro ejemplo de bolas de billar (ahora sin orden) es:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **16!** | **=** | **16!** | **=** | **20,922,789,888,000** | **= 560** |
|  |  |  |
| **3!(16-3)!** | **3!×13!** | **6×6,227,020,800** |

**O lo puedes hacer así:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **16×15×14** | **=** | **3360** | **= 560** |
|  |  |
| **3×2×1** | **6** |

**En otras palabras, elegir 3 bolas de 16 da las mismas combinaciones que elegir 13 bolas de 16.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **16!** | **=** | **16!** | **=** | **16!** | **= 560** |
|  |  |  |
| **3!(16-3)!** | **13!(16-13)!** | **3!×13!** |

**Combinaciones con repetición:**

**Digamos que tenemos cinco sabores de helado: banana, chocolate, limón, fresa y vainilla. Puedes tomar 3. ¿Cuántas variaciones hay?**

**Vamos a usar letras para los sabores: {b, c, l, f, v}. Algunos ejemplos son**

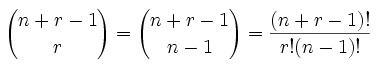
* **{c, c, c} (3 de chocolate)**
* **{b, l, v} (uno de banana, uno de limón y uno de vainilla)**
* **{b, v, v} (uno de banana, dos de vainilla)**

**(Y para dejarlo claro: hay n=5 cosas para elegir, y eliges r=3 de ellas.  
El orden no importa, ¡y sí puedes repetir!)**

**Así que (en general) hay r + (n-1) posiciones, y queremos que r de ellas tengan círculos.**

**Esto es como decir "tenemos r + (n-1) bolas de billar y queremos elegir r de ellas". Es decir, es como el problema de elegir bolas de billar, pero con números un poco distintos.**

**Lo podrías escribir así:**

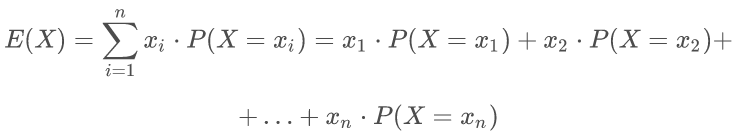


**¿Qué pasa con nuestro ejemplo, cuál es la respuesta?**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **(5+3-1)!** | **=** | **7!** | **=** | **5040** | **= 35** |
|  |  |  |
| **3!(5-1)!** | **3!×4!** | **6×24** |

**ESPERANZA MATEMÁTICA**

**La esperanza matemática  es la suma de la probabilidad de cada posible suceso multiplicado   
por la frecuencia de dicho proceso, es decir si tenemos una variable cuantitativa discreta con   
posibles sucesos  y probabilidades la esperanza matemática es:**



**Ejemplo:**

**Seis personas apuestan 10 Pesos a que saldrá un número en un dado, cada uno a un número diferente. Entonces por cada peso apostado si se gana recibes 50 pesos más. ¿Saldrá a cuenta apostar en este juego?**

**La probabilidad de perder es 5/6 , ya que perderemos si no sale el número elegido.**

**En cambio la probabilidad de ganar es de 1/6 .**

**Así la esperanza es:**

**-10 (5 / 6) + 50 (1 / 6) = 0**

**Decimos que un juego es equitativo cuando la esperanza de beneficio es 0.**